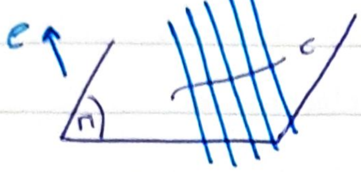
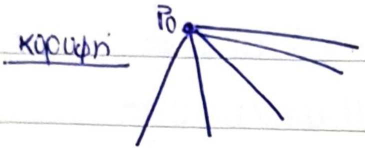
7/1/19

"Ευθειογενείς επιφάνειες" ← Παλιά + Αναπτυκτές επιφ.

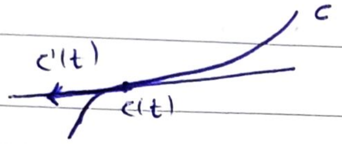
1) Κυλινδρικές επιφάνειες



2) Κωνικές επιφάνειες



3) Επιφάνειες εφαπτομένων



$c: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ κανονική

$$X(t,v) = c(t) + v c'(t)$$

Πρόταση: Αν $c: I \to S$ είναι ευθεία της S τότε είναι κ' ασυμπτωτική καμπύλη της S.

$$X(u,v) = c(u) + v w(u) \quad , \quad w(u) \neq 0$$

Πόρισμα: Οι ευθειογενείς επιφάνειες έχουν καμπυλότητα Gauss $K \leq 0$.

"Αναπτυκτές επιφάνειες"

... Θεωρ. + Πρόταση (από προηγ.) (...)

Πρόταση: Κάθε αναπτυκτή επιφάνεια τοπικά είναι κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομένων

Πόρισμα: Έστω S επιφάνεια με $K=0$ χωρίς ισόπεδα σημεία. Τότε είναι τοπικά κυλινδρική, κωνική ή επιφάνεια εφαπτομένων.

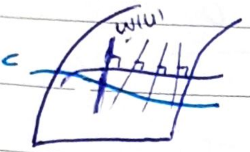
Ένα αντίστοιχο του έξοχου θεωρήματος:

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ</u>: Έστω S επιφάνεια με καμπυλότητα Gauss $K=0$. Αν <u>δεν περιέχει ισόπεδα σημεία</u> τότε είναι τοπικά ισομετρική με το επίπεδο.

<u>ΑΠΟΔ.</u>

Γνωρίζω ότι η S είναι αναπτυκτή

$$X(u,v) = c(u) + v w(u), \quad \|w(u)\| = 1$$



$$\langle c'(u), w(u) \rangle = 0 \quad \forall u \in I$$

$$X_u(u,v) = c'(u) + v w'(u)$$

$$X_v(u,v) = w(u)$$

$$E = \|X_u\|^2 = \|c'(u) + v w'(u)\|^2 = \|c'(u)\|^2 + 2v \langle c'(u), w'(u) \rangle + v^2 \|w'(u)\|^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = 0$$

$$G = \|X_v\|^2 = \|w(u)\|^2 = 1$$

$$[c'(u), w(u), w'(u)] = 0 \Leftrightarrow \langle c'(u) \times w(u), w'(u) \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow w'(u) &\perp c'(u) \times w(u) \\ w'(u) &\perp w(u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow w'(u) \parallel (c'(u) \times w(u)) \times w(u)$$

$$\Rightarrow w'(u) \parallel \cancel{\langle c'(u), w(u) \rangle w(u)} - c'(u)$$

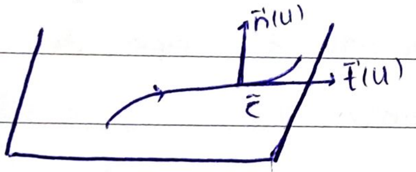
$$\Rightarrow \boxed{w'(u) = a(u) c'(u)}$$

$$E = 1 + 2v \cdot \langle c'(u), a(u) c'(u) \rangle + v^2 a^2(u) \cdot \|c'(u)\|^2$$

$$E = 1 + 2v a(u) + v^2 a^2(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} E(u,v) = (1 + v a(u))^2 \\ F(u,v) = 0 \\ G(u,v) = 1 \end{cases}}$$

Θεωρώ επίπεδο Π με $u =$ μήκος τόξου.



Τα σημεία του επιπέδου "κοντά στην $\tilde{c}$" γράφονται ως: $\tilde{X}(u,v) = \tilde{c}(u) + v \vec{n}(u)$

$$\tilde{X}_u(u,v) = \dot{\tilde{c}}(u) + v \dot{\vec{n}}(u)$$

$$= \vec{t}(u) - v \tilde{\kappa}(u) \vec{t}(u)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{X}_u(u,v) = (1 - v \tilde{\kappa}(u)) \vec{t}(u)}$$

$$\tilde{X}_v(u,v) = \vec{n}(u)$$

$\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde{E}(u,v) &= \|\tilde{X}_u(u,v)\|^2 = (1-v\tilde{k}(u))^2\\ \tilde{F}(u,v) &= \langle \tilde{X}_u(u,v), \tilde{X}_v(u,v)\rangle = 0\\ \tilde{G}(u,v) &= \|\tilde{X}_v(u,v)\|^2 = 1\end{aligned}}$$

Είναι ίσα ?

Επιλέγω την $\tilde{c}$ έτσι ώστε $\tilde{k}(u) = -a(u)$ ← από θεμελ. θεώρ. καμπυλών

Τότε $\tilde{E} = E$, $\tilde{F} = F$, $\tilde{G} = G$

ΤΕΛΟΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ !

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Δίνεται η επιφάνεια S με εξίσωση $z = xy$. Εξετάστε αν είναι ευθειογενής κ' αναπτυκτή

ΛΥΣΗ:

Η S είναι κανονική ως επιφάνεια γράφημα της $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = xy$. Θεωρώ το σύστημα συντ/νων $X: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$X(x,y) = (x, y, h(x,y)) = (x, y, xy) = (x, 0, xy) + (0, y, 0) = (0,y,0) + x(1,0,y)$$

δηλ. $X(x,y) = c(y) + x\omega(y)$, όπου $c(y) = (0,y,0)$ κ' $\omega(y) = (1,0,y) \neq 0$

Άρα είναι ευθειογενής

Το μοναδιαίο κάθετο είναι:

$$N(x,y) = \frac{(-h_x(x,y), -h_y(x,y), 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} = \frac{(-y, -x, 1)}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$$

εξαρτάται από το x, άρα δεν είναι αναπτυκτή

(διότι θα έπρεπε το μοναδιαίο να είναι σταθερό ως προς τη γεννήτορα της)

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^2}\\ h_x &= y \Rightarrow h_{xx} = 0\\ h_y &= x \Rightarrow h_{yy} = 1\end{aligned}\right\} \Rightarrow K = -\frac{1}{(x^2+y^2+1)^2} < 0$$

• Ίδια ερωτήματα για την επιφάνεια $z = xy^2$

ΛΥΣΗ:

Είναι κανονική ως επιφάνεια γράφημα της $h(x,y) = xy^2$ με σύστημα συντ/νων: $X(x,y) = (x, y, xy^2) = (x,0,0) + (0, y, xy^2)$

$= (x,0,0) + y(0,1,xy)$?

Αν κάνουμε το ανάποδο ?

$X(x,y) = (0,y,0) + (x,0,xy^2) = (0,y,0) + x(1,0,y^2)$

Αν αποτύγχανε (1η περίπτωση) θα κάναμε το εξής:

Αναζητώ τις ασυμπτωτικές καμπύλες.

Η καμπύλη $c(t) = X(x(t), y(t))$ είναι ασυμπτωτική $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e(x(t), y(t))(x'(t))^2 + 2f(\ldots)x'(t)y'(t) + g(\ldots)(y'(t))^2 = 0$

$e(x,y) = 0$, $f(x,y) = \dfrac{2y^{=h_{xx}}}{\sqrt{\ }}$, $g(x,y) = \dfrac{2x^{=h_{yy}}}{\sqrt{\ }}$ $= \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}$

$$\frac{4y(t)}{\sqrt{\ }} x'(t)y'(t) + \frac{2x(t)}{\sqrt{\ }}(y'(t))^2 = 0$$

$\Leftrightarrow 2y(t)x'(t)y'(t) + x(t)(y'(t))^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(t)(2y(t)x'(t) + x(t)y'(t)) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y'(t) = 0$ ή $2y(t)x'(t) + x(t)y'(t) = 0$

$\Leftrightarrow y(t) = a_1$ ή $y(t)(x^2(t))' + x^2(t)y'(t) = 0$

$\Leftrightarrow y(t) = a_1$ ή $y(t)x^2(t) = a_2$

1η οικογ. ασυμπτ. καμπυλών

$y(t) = a_1$

$X(x, y=a_1) = (x, a_1, xa_1^2) = (0, a_1, 0) + x(1, 0, a_1^2)$

άρα ευθειογενής

2η οικογ. ασυμπτ. καμπυλών

$y(t)x^2(t) = a_2$

$yx^2 = a_2$

$y = \dfrac{a_2}{x^2}$

$X\left(x, y = \dfrac{a_2}{x^2}\right) = \left(x, \dfrac{a_2}{x^2}, x\dfrac{a_2^2}{x^4}\right)$

$K = \dfrac{h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^2} = \dfrac{-4y^2}{(\ldots)^2} \neq 0$

άρα όχι αναπτυκτή

• Δίνονται οι παραμετρικές επιφάνειες $X(u,v) = (u\cos v,\ u\sin v,\ \log u)$,
$\tilde{X}(\tilde{u},\tilde{v}) = (\tilde{u}\cos\tilde{v},\ \tilde{u}\sin\tilde{v},\ \tilde{v})$

Να υπολογιστούν I, II, $\tilde{I}$, $\tilde{II}$, K, $\tilde{K}$,

Τι παρατηρούμε ?

ΛΥΣΗ:

$X_u = (\cos v,\ \sin v,\ 1/u)$

$X_v = (-u\sin v,\ u\cos v,\ 0)$

$E(u,v) = \|X_u\|^2 \Rightarrow E(u,v) = 1 + 1/u^2$

$F(u,v) = \langle X_u, X_v \rangle \Rightarrow F(u,v) = 0$

$G(u,v) = \|X_v\|^2 \Rightarrow G(u,v) = u^2$

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \cos v & \sin v & 1/u \\ -u\sin v & u\cos v & 0 \end{vmatrix} = \dots = (-\cos v,\ -\sin v,\ u)$$

$$N(u,v) = \frac{(-\cos v,\ -\sin v,\ u)}{\sqrt{1+u^2}}$$

$X_{uu} = (0, 0, -1/u^2)$

$X_{uv} = (-\sin v,\ \cos v,\ 0)$

$X_{vv} = (-u\cos v,\ -u\sin v,\ 0)$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{-1}{u\sqrt{1+u^2}}$$

$f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

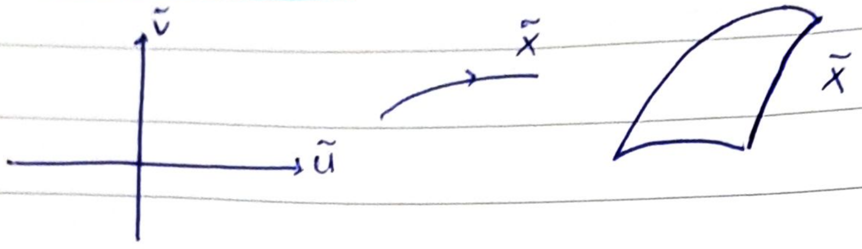
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-\frac{1}{1+u^2}}{u^2+1} \Rightarrow K = -\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

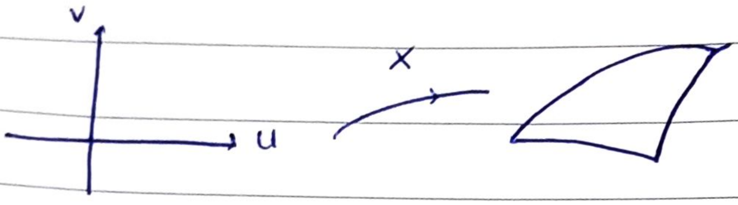
Πάμε στη 2η επιφάνεια...

$\tilde{X}_{\tilde{u}} = (\cos\tilde{v},\ \sin\tilde{v},\ 0)$

$\tilde{X}_{\tilde{v}} = (-\tilde{u}\sin\tilde{v},\ \tilde{u}\cos\tilde{v},\ 1)$

$$\boxed{\begin{aligned}\tilde E(\tilde u,\tilde v)&=1\\ \tilde F(\tilde u,\tilde v)&=0\\ \tilde G(\tilde u,\tilde v)&=\tilde u^2+1\end{aligned}} \qquad \tilde K(\tilde u,\tilde v) = -\frac{1}{(1+\tilde u)^2}$$





Ερώτημα: Είναι τοπικά ισομετρικές ?

$$\tilde K(\tilde u,\tilde v) = K(u,v) \iff \boxed{\tilde u = u}$$

$$\tilde u = \phi(u,v)$$

Τότε θα πρέπει:

$$X_u = \frac{\partial \tilde u}{\partial u}\tilde X_{\tilde u} + \frac{\partial \tilde v}{\partial u}\tilde X_{\tilde v} = \tilde X_{\tilde u} + \phi_u \tilde X_v$$

$$X_v = \cancel{\frac{\partial \tilde u}{\partial u}}\tilde X_{\tilde u} + \frac{\partial \tilde v}{\partial v}\tilde X_{\tilde v} = \phi_v \tilde X_{\tilde v}$$

$$E = \|X_u\|^2 = \|\tilde X_{\tilde u}\|^2 + \phi_u^2\|\tilde X_{\tilde v}\|^2 + 2\phi_u\langle \tilde X_{\tilde u}, \tilde X_{\tilde v}\rangle$$

$$E = 1 + \phi_u^2(u^2+1) \iff \cancel{1} + \frac{1}{u^2} = \cancel{1} + \phi_u^2(u^2+1) \iff \boxed{\phi_u^2 = \frac{1}{u^2(u^2+1)}}$$

$$F = \langle X_u, X_v\rangle = \phi_u\phi_v(u^2+1) \implies \cancel{\phi_u} = 0 \quad \text{ή} \quad \phi_v = 0$$

$$G = u^2 = \langle X_u, X_v\rangle = \phi_v^2(u^2+1)$$